数理解析研究所講究録
325巻 1978年 124-127

内部部分群をもつ有限群

東工大 理　野村和正

群はすべて有限群とする。群Gの部分群Hが

$$N_G(H)/C_G(H) = Aut(H)$$

をみたすとき，HをGの<u>内部部分群</u>という．

<u>定理1</u>　すべての部分群が内部部分群であるような群は S_1, S_2, S_3 に限る．

<u>定理2</u>　すべての可換部分群が内部部分群であるような可解群は，S_1, S_2, S_3, Q_8 に限る．

定理1の証明は容易なので略す．すべての可換部分群が内部部分群であるような群を，以下 <u>AI-群</u> とよぶ．

つい最近，宮本雅彦氏（北大理）により，AI-群の可解性が証明された．従って，AI-群は上記のものに限る．

まずAI-群の基本的な性質をまとめておく．証明は簡単なので省略する．

補題　GをAI-群，$p\in\pi(G)$，$P\in Syl_p(G)$とする．

(1) $|Z(P)|=p$．

(2) Gの位数pの元は互に共役．

(3) $N\lhd G$，$(|G/N|,|N|)=1 \Longrightarrow G/N$ もAI-群

(4) MをPの極大可換正規部分群とすると

$$C_G(M)=T\times M$$

なる p'-群 Tがあり，TもAI-群になる．

以下，定理2の証明を行う．S_1，S_2，S_3，Q_8と異なる可解AI-群が存在すると仮定し，そのうちで位数最小のものをGとする．Gは可解だから，$m_2(G)=1$ または $m_2(G)=2$ のいずれかである．

まず，$m_2(G)=1$ の場合を考える．$S\in Syl_2(G)$とする．Sはindex 2の巡回部分群Kをもち，$S/K=\mathrm{Aut}\,K$ だから，$S\cong Z_2$ または $S\cong Q_8$．もし $m_3(G)\geq 2$ とすると，$Z_3\times Z_3$ をGがinvolveするが，$\mathrm{Aut}(Z_3\times Z_3)$ の位数は2^4で割れるから否．よって $m_3(G)=1$．従って，Gの odd Sylow群はすべて巡回群．Gの最小性と．補

題(3)により，$F(G)$ は 2-群になる．同じ理由で，$S \nleq F(G)$．よって $F(G) \cong Z_2$ または Z_4．Gは可解だから，$C_G(F(G)) \subseteq F(G)$．よって $|G/F(G)| \leqq 2$，つまり $|G| \leqq 8$ となり不合理．

以下 $m_2(G) = 2$ とする．

まず $F(G)$ が偶数位数と仮定する．$S_0 \in Syl_2(F(G))$，$M = \Omega_1(Z(S_0))$ とおくと，MはGの involution をすべて含み，$M \cong Z_2 \times Z_2$．Mの位数3の自己同型を導くGの元 x をとる．とくに x は 3-element にとれる．$N_G(\langle x \rangle)$ は偶数位数だから，$N_M(\langle x \rangle) \neq 1$．$[N_M(\langle x \rangle), x] \leqq M \cap \langle x \rangle = 1$ より $C_M(x) \neq 1$．これは，xがM上で位数3であることに反する．従って $F(G)$ は奇数位数である．

Gの最小性と補題(3)より，$F(G)$は 3-群．$M = \Omega_1(Z(F(G)))$ とおくと，$M \cong Z_3 \times Z_3$．いま $p \in \pi(G)$，$p \geqq 5$ なる p があるとすると，補題(4)により，$M \nleq C_G(P)$，ここで $P \in Syl_p(G)$．従って $P \leqq Aut(M)$ となるが，$|Aut\, M| = 2^4 \cdot 3$ だから不合理．よって Gは $\{2, 3\}$-群である．

$C_G(M)$は偶数位数である．なぜなら，もし奇数位数とすると，Gの 2-Sylow 群 S は $Aut\, M$ の 2-Sylow

群に同型だから $|S|=2^4$ で，かつ S は位数 8 の元 x を含む． これは $\langle x\rangle$ が内部部分群であることに反する． 従って $C_G(M)$ は偶数位数であり， G のすべての involution を含んでいる．

さて， $R\in Syl_3(G)$ とし， M を含む R の極大可換正規部分群 L をとる． もし $C_G(L)=L$ であるとすると， L の元を invert する G の involution x があるが， $x\in C_G(M)$ となり不合理． よって $C_G(L)>L$．

$C_G(L)=T\times R$ とすると， $T=Z_2$ または Q_8 である． T の involution を τ とおく． $H=C_G(\tau)$ とおくと， $C_G(L)\leqq H$ である． $\langle\tau\rangle\times L$ は G の内部部分群だから， $N_H(L)/C_H(L)=\mathrm{Aut}\,L=N_G(L)/C_G(L)$． よって $N_G(L)=N_H(L)$． これから $R\leqq N_H(L)\leqq H$． さらに H は G の 2-Sylow 群をも含んでいるから， G が $\{2,3\}$-群であることにより $H=G$． つまり $\tau\in Z(G)$． 従って， G は唯 1 つの involution τ をもつことになり， $m_2(G)=2$ に反する． 証明終．